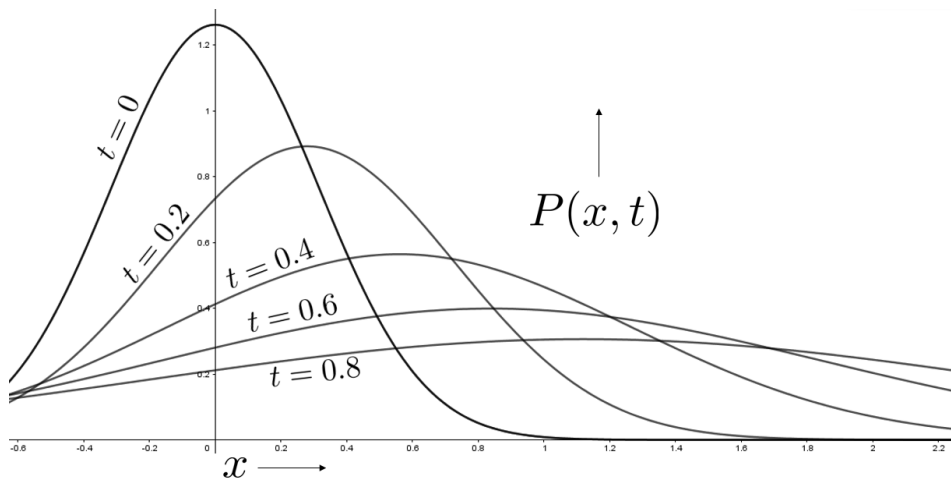




Figuur 6.9: Een wandelende Gauss klok

0. Daarom zou het logisch zijn dat de onzekerheid in de plaats in de loop van de tijd toeneemt. Anderzijds is het dan weer vreemd dat dit effect voor het verleden juist andersom is (in het plaatje is dit een beetje verdoezelt). Als de tijd van $-\infty$ naar 0 loopt dan wordt de Gaussklok juist steeds scherper. Het blijft toch wat behelpen om via golfpakketjes aansluiting te vinden bij onze klassieke denkbeelden over de mechanica.

Normalisatie. Nog een klein technisch punt moet worden behandeld. De integraal van (6.25) voor x van $-\infty$ naar $+\infty$ moet nog 1 zijn (normalisatievoorwaarde) en het zou heel toevallig zijn als dat al klopte. Laten we die integraal even uitrekenen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} e^{\frac{-\alpha(x-2\beta k_0 t)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\alpha(x-2\beta k_0 t)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}} dx$$

De integraal is een Gauss-integraal met

$$a = \frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)} \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{2\pi(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}{\alpha}}$$

We krijgen dus:

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} \sqrt{\frac{2\pi(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\pi^3}{\alpha}}$$

We moeten de oplossing (6.22) dus nog met $\sqrt[4]{\frac{\alpha}{2\pi^3}}$ vermenigvuldigen om een genormaliseerde oplossing te verkrijgen. Enigszins verrassend is dat de tijd t bij de berekening is weggefallen.

Normalisatie tijdsafhankelijk. Zo verrassend is dat echter ook weer niet. Het zou namelijk vervelend zijn als de normalisatie constante nog van t zou afhangen, want waarschijnlijk is dan niet meer aan de golfvergelijking voldaan. Gelukkig kunnen we in het algemeen het volgende bewijzen: als de functie $\psi(x, t)$ aan de golfvergelijking voldoet en normaliseerbaar is, dus de integraal van $P(x, t) = \psi^* \psi$ voor x van $-\infty$ naar $+\infty$ bestaat, dan hangt deze integraal niet van t af. Voor het bewijs berekenen we de afgeleide naar t van deze integraal:

$$A := \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx \quad (6.26)$$

Nu voldoet ψ aan de golfvergelijking (5.44) dus:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

Hier kunnen we $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ en $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$ uit isoleren:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{iV}{\hbar} \psi \quad \text{en} \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{iV}{\hbar} \psi^*$$

Vullen we dit in bij (6.26):

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{iV}{\hbar} \psi^* \right) \psi + \psi^* \left(\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{iV}{\hbar} \psi \right) \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi + \frac{iV}{\hbar} \psi^* \psi + \psi^* \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi^* \frac{iV}{\hbar} \psi \right] dx \end{aligned}$$

De termen met de potentiaal V erin vallen tegen elkaar weg en $\frac{i\hbar}{2m}$ halen we buiten de integraal:

$$A = \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi + \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx \quad (6.27)$$

Nu komt een trucje. We bedenken ons dat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) &= \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi + \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* \right) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \psi^* + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \end{aligned}$$

Trekken we deze twee vergelijkingen van elkaar af, dan zien we dat de laatste termen tegen elkaar wegvallen. De integraal bij (6.27) wordt dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* \right) dx = \left[-\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \psi^* \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

De laatste gelijkheid volgt omdat de golffunctie in $-\infty$ en ∞ nul wordt. Dus $A = 0$ en de integraal hangt dus niet af van t . In het bijzonder: éénmaal genormaliseerd, altijd genormaliseerd. Dit ondersteunt de juistheid van de Born-interpretatie (6.1) op bladzijde 116.